

2020 学年第一学期丽水中学合作校联考试题

高三年级数学学科 试题

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号并填涂相应数字。
3. 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效。
4. 考试结束后，只需上交答题纸。

第 I 卷（选择题部分，共 40 分）

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2^x > 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $[-4, +\infty)$ B. $[-4, 2]$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 2]$

2. 设复数 $z = (1+i)(3+i)$ ，则 z 的虚部为

- A. 4 B. $4i$ C. -4 D. $-4i$

3. 下列函数中既是奇函数，又在区间 $[-1, 1]$ 上递增的是

- A. $f(x) = -\sin x - x$ B. $f(x) = \tan x + x$ C. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ D. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

4. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \leq 0 \\ 4x + y + 6 \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$ ，则 $z = x + y$ 的最大值为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. -2

5. 设 m, n 为两条不同的直线， α, β 为两个不同的平面，则下列命题中正确的是

- A. 若 $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$

6. 已知命题 $p: x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ，命题 $q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，则 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[1, +\infty)$ C. $\{0\}$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

7. 已知随机变量 ζ 的分布列如下:

ζ	1	$\frac{3}{2}$	2
P	n	m	$2m-n$

则 $D(\zeta)$ 的最大值

- A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 项和为 S_n , 且满足 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$), $a_1 = m, a_2 = n$, 则下列结论正确的是

A. $a_{2021} = -m, S_{2021} = 2n - m$ B. $a_{2021} = -n, S_{2021} = 2n - m$

C. $a_{2021} = -n, S_{2021} = n - m$ D. $a_{2021} = -m, S_{2021} = n - m$

9. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, 圆 $C: (x-2)^2 + (y-m)^2 = \frac{1}{4}$ ($m > 0$), 在圆上存在点 P

满足 $|PA| = 2|PB|$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}]$ B. $[\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{2}]$ C. $(0, \frac{\sqrt{21}}{2}]$ D. $[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}]$

10. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 左右焦点为 F_1, F_2 , 抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与椭圆 C_1 有一个公共焦点, 若点 P 是椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的一个公共点, 且 $|PF_1| > 2|F_1F_2|$, 则椭圆 C_1 的离心率取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ C. $(0, \frac{-1+\sqrt{6}}{5})$ D. $(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}, \frac{2}{5})$

第 II 卷 (非选择题部分, 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

11. 已知 $5^a = 6$, 则 $a =$ $\blacktriangle$, $a - \log_5 30 =$ $\blacktriangle$.

12. 已知角 α 的终边经过点 $(3, 1)$, 则 $\sin \alpha =$ $\blacktriangle$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ $\blacktriangle$.

13. 某几何体的三视图如图所示, 其中正视图由一个半圆和一个正三角形拼接而成而俯视图是半径为 1 的圆, 则该几何体的体积是 $\blacktriangle$, 表面积是 $\blacktriangle$.



正视图



侧视图



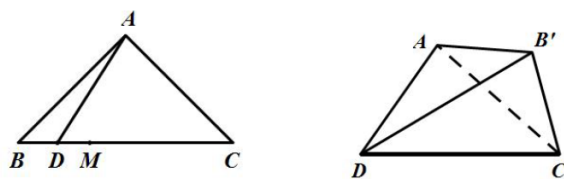
俯视图

14. 若二项式 $(\sqrt{2}x+1)^n$ 的展开式中二项式系数和为 64, 则 $n = \underline{\hspace{1cm}}$, 展开式中二项式系数最大的项为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

15. 已知正实数 x, y, z 满足 $x+y=xy, x+y+z=(x+y)z$, 则 $\frac{z}{1+z}$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

16. 已知平面向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 均有 $|\vec{c} + t\vec{b}|$ 的最小值为 $|\vec{c} - \vec{a}|$, 则 $|3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| + |\vec{c} - \vec{a}|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$, $AB = AC = 1$, $BM = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 点 D 在线段 BM 上运动, 沿 AD 将 $\triangle ADB$ 折到 $\triangle ADB'$, 使二面角 $B'-AD-C$ 的度数为 60° , 若点 B' 在平面 ABC 内的射影为 O , 则 OC 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sqrt{2} \sin A \sin C$.

(I) 求角 B 的大小;

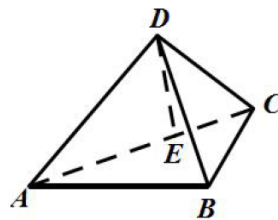
(II) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $b = \sqrt{2}$, 求 $a - \sqrt{2}c$ 的取值范围.

19. (本题满分 15 分)

如图, 三棱锥 $D-ABC$ 中, $BA = BC = 2$, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $\triangle DBC$ 是等边三角形, E 为 AC 三等分点 (靠近 C 点).

(I) 求证: $BC \perp DE$;

(II) 当 $DE = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 时, 求 AD 与平面 BCD 所成线面角的正弦值.



20. (本题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 1, n \geq 2$ 时, $T_n(T_{n-1} + 1) + T_{n-1}(T_n - 1) = 0$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

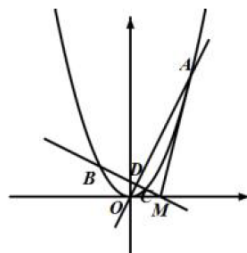
(II) 设 $b_n = 1 - T_n$, 求证: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdots b_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 成立.

21. (本题满分 15 分)

已知抛物线 $E: x^2 = y$, 过抛物线上第一象限的点 A 作抛物线的切线, 与 x 轴交于点 M . 过 M 作 OA 的垂线, 交抛物线于 B, C 两点, 交 OA 于点 D .

(I) 求证: 直线 BC 过定点;

(II) 若 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} \leq -1$, 求 $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值.



22. (本题满分 15 分)

已知函数 $s(x) = \ln(x+a)$, $t(x) = x-1$

(I) 若关于 x 的不等式 $m + a \cdot t(x) \geq s(x)$ ($a > 0$) 恒成立, 求 m 的取值范围;

(II) 若 $a > 1$, 方程 $s(x) = a \cdot t(x)$ 的较小的实根为 x_0 , 证明函数

$g(x) = |s(x) - a \cdot t(x)| + t(x)$ 在 $(-a, x_0)$ 上单调递减;

(III) 若 $a > 0$, 且函数 $y = s(x) - s(0) - a \cdot t(x)$ 的较大零点为 x_1 , 求证: $x_1 + 2a > 4$.

2021年2月丽水中学合作校联考卷

1: 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2^x > 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-4, +\infty)$ B. $[-4, 2]$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 2]$

故选 D.

2: 设复数 $z = (1+i)(3+i)$, 则 z 的虚部为 ()

- A. 4 B. $4i$ C. -4 D. $-4i$

故选 A.

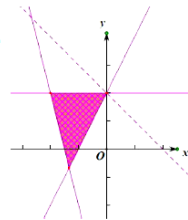
3: 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $[-1, 1]$ 上递增的是 ()

- A. $f(x) = -\sin x - x$ B. $f(x) = \tan x + x$ C. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ D. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

故选 B.

4: 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \leq 0 \\ 4x + y + 6 \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. -2



故选 A.

5: 设 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

故选 C.

- 6: 已知命题 $p: x^2 - 3x + 2 \leq 0$, 命题 $q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 m 的取值范围是 ()
 A、 $(-\infty, 0]$ B、 $[1, +\infty)$ C、 $\{0\}$ D、 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

故选 D;

- 7: 已知随机变量 ζ 的分布如下:

ζ	1	$\frac{3}{2}$	2
P	n	m	$2m - n$

则 $D(\zeta)$ 的最大值是 ()

- A、 $\frac{1}{36}$ B、 $\frac{1}{18}$ C、 $\frac{1}{6}$ D、 $\frac{1}{3}$

故选: C;

- 8: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n ($n \in \mathbb{N}^+$) 项和为 S_n , 且满足 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$), $a_1 = m$, $a_2 = n$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a_{2021} = -m$, $S_{2021} = 2n - m$ B. $a_{2021} = -n$, $S_{2021} = 2n - m$
 C. $a_{2021} = -n$, $S_{2021} = n - m$ D. $a_{2021} = -m$, $S_{2021} = n - m$

故选 C.

9: 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, 圆 $C:(x-2)^2+(y-m)^2=\frac{1}{4}(m>0)$, 在圆上存在点 P 满足 $|PA|=2|PB|$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$

故选: D.

10: 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 与椭圆 C_1 有一个公共焦点, 若点 P 是椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的一个公共点, 且 $|PF_1| > 2|F_1F_2|$, 则椭圆 C_1 的离心率取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ C. $(0, \frac{-1+\sqrt{6}}{5})$ D. $(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}, \frac{2}{5})$

故选 C.

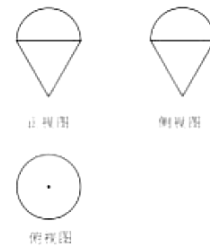
11: 已知 $5^a = 6$, 则 $a =$ _____, $a - \log_5 30 =$ _____.

故填: $\log_3 6$, -1

12: 已知角 α 的终边经过点 $(3,1)$, 则 $\sin \alpha =$ _____, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

故填: $\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$

13: 某几何体的三视图如图所示, 其中正视图由一个半圆和一个正三角形拼接而成而俯视图是半径为 1 的圆, 则该几何体的体积是 _____, 表面积是 _____.



故填: $\frac{(2+\sqrt{3})}{3}\pi$, 4π

14: 若二项式 $(\sqrt{2x}+1)^n$ 的展开式中二项式系数和为 64, 则 $n =$ _____, 展开式中二项式系数最大的项为 _____.

故填 6 , $40\sqrt{2}x^3$.

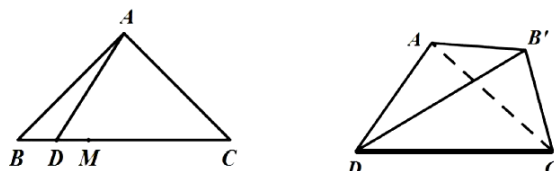
15: 已知正实数 x, y, z 满足 $x+y=xy$, $x+y+z=(x+y)z$, 则 $\frac{z}{1+z}$ 的取值范围是 _____.

故填 $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right]$.

16: 已知平面向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$ ，若对任意的 $t \in R$ ，均有 $|\vec{c}+t\vec{b}|$ 的最小值为 $|\vec{c}-\vec{a}|$ ，则 $|\vec{3a}+\vec{b}-\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{a}|$ 的最小值为_____.

最小值为6

17: 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{MC}$ ， $AB=AC=1$ ， $BM=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，点 D 在线段 BM 上运动，沿 AD 将 $\triangle ADB$ 折到 $\triangle ADB'$ ，使得二面角 $B'-AD-C$ 的度数为 60° ，若点 B' 在平面 ABC 内的射影为 O ，则 OC 的最小值为_____.



OC 的最小值为 $\frac{\sqrt{65}}{10}$.

18: 在 $\triangle ABC$ 中， a ， b ， c 分别是角 A ， B ， C 的对边， $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sqrt{2} \sin A \sin C$.
(I) 求角 B 的大小；

(II) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $b = \sqrt{2}$, 求 $a - \sqrt{2}c$ 的取值范围.

解

(I) 由已知 $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sqrt{2} \sin A \sin C$, 结合正弦定理, 得 $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$.

再由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 则 $B = \frac{\pi}{4}$.

(II) 由 $B = \frac{\pi}{4}, b = \sqrt{2}$, 则由正弦定理, 有

$$a - \sqrt{2}c = 2 \sin A - 2\sqrt{2} \sin C = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{4} - C \right) - 2\sqrt{2} \sin C = -2 \sin \left(C - \frac{\pi}{4} \right).$$

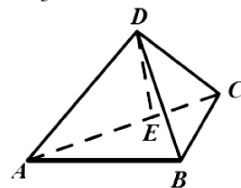
因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $\frac{\pi}{4} < C < \frac{\pi}{2}$, 有 $0 < C - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$. 则 $-\sqrt{2} < -2 \sin \left(C - \frac{\pi}{4} \right) < 0$.

所以 $a - \sqrt{2}c$ 的取值范围为 $(-\sqrt{2}, 0)$.

19: (本小题满分 15 分) 如图, 三棱锥 $D-ABC$ 中, $BA = BC = 2$, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $\triangle DBC$ 是等边三角形, E 为 AC 三等分点 (靠近 C 点).

(I) 求证: $BC \perp DE$;

(II) 当 $DE = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 时, 求 AD 与平面 BCD 所成线面角的正弦值.



解 (I) $\because \angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $BA = BC = 2$, $\therefore \angle ACB = \frac{\pi}{6}$.

取 BC 中点 M , 连结 DM , EM , 因此 $DM \perp BC$.

$\because E$ 为 AC 三等分点 (靠近 C 点), $AB = 2$, $\therefore EC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $CM = 1$,

由 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$, 得 $EM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此 $EM \perp BC$.

$\because DM \subset$ 平面 DME , $EM \subset$ 平面 DME , $DM \cap EM = M$, $\therefore BC \perp$ 平面 DME ,

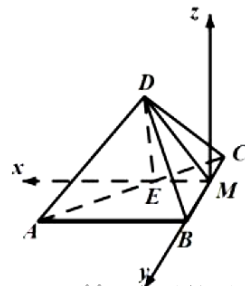
又 $\because DE \subset$ 平面 DME , $\therefore BC \perp DE$.

(II) 由 (I) 可知, $BC \perp$ 平面 DME , $EM \perp BC$,

以 M 为坐标原点, 建立如图所示空间直角坐标系,

已知 $EM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $DM = \sqrt{3}$, 因为 $DE = \frac{\sqrt{21}}{3}$, 所以 $\cos \angle DEM = -\frac{\sqrt{7}}{14}$,

则 $A(\sqrt{3}, 2, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $D(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$.



得 $\overrightarrow{AD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{BD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{CD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{3}{2})$

设平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - y + \frac{3}{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = \sqrt{3}, \text{ 则 } y = 0, z = -1, \text{ 即 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, -1),$$

设 AD 与平面 BCD 所成线面角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{n}|} = \frac{3}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$.

20: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 T_n ($n \in N^*$), $a_1 = 1$, $n \geq 2$ 时, $T_n(T_{n-1} + 1) + T_{n-1}(T_n - 1) = 0$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 1 - T_n$, 求证: 对任意的 $n \in N^*$, 不等式 $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdots b_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 成立.

(1) 解: 由题可知: 当 $n \geq 2$ 时, $2T_n T_{n-1} = -a_n = T_{n-1} - T_n$, 则 $\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = 2$

即 $T_n = \frac{1}{2n-1}$, 则 $a_n = T_n - T_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3}$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2 \neq 1$

即 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3}, n \geq 2 \\ 1, n=1 \end{cases}$

(2) 解: 由 (1) 可知: $n \geq 2$ 时, $b_n = 1 - T_n = 1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$

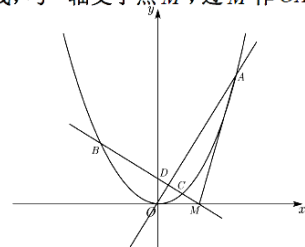
则 $b_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} < \frac{2n+1}{2n+2}$, 即 $b_{n+1}^2 < \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{n}{n+1}$

即 $b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n+1} = \sqrt{b_2^2 \cdot b_3^2 \cdots b_{n+1}^2} < \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

21: 已知抛物线 $E: x^2 = y$, 过抛物线上第一象限的点 A 作抛物线的切线, 与 x 轴交于点 M , 过 M 作 OA 的垂线, 交抛物线于 B, C 两点, 交 OA 于点 D .

(I) 求证: 直线 BC 过定点;

(II) 若 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} \leq -1$, 求 $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值.



(1) 解 : 抛物线切线

设点 $A(t, t^2) (t > 0)$, 则 $k_{AM} = y'|_{x=t} = 2t$,

$\therefore$ 直线 AM 的方程为: $y - t^2 = 2t(x - t)$,

即 $y = 2tx - t^2$, $\therefore M\left(\frac{t}{2}, 0\right)$, 又 $k_{OA} = t$, $\therefore k_{BC} = -\frac{1}{t}$,

$\therefore$ 直线 BC 的方程: $y = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}$ 经过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(2) 解 : 点坐标求解

由 (I) 直线 BC 的方程为: $y = -\frac{1}{t}x + 1$,

与抛物线 $x^2 = y$ 联立得 $x^2 + \frac{1}{t}x - \frac{1}{2} = 0$,

解得 $x_B = \frac{-\frac{1}{t} - \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2}}{2}$, 而 $\overline{OB} \cdot \overline{OM} \leq -1$, 即 $x_B \cdot x_M \leq -1$,

$\therefore \frac{-\frac{1}{t} - \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2}}{2} \cdot \frac{t}{2} \leq -1$, 解得 $t \geq 2$,

$\therefore |AD| = \frac{\left|-\frac{1}{t} \times t + \frac{1}{2} - t^2\right|}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \frac{\left|t^2 + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot t$, $|AO| = \sqrt{t^2 + t^4} = t\sqrt{t^2 + 1}$,

$\therefore |AD| \cdot |AO| = t^2 \frac{\left|t^2 + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \sqrt{t^2 + 1} = t^2 \left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \geq 18$,

当 $t = 2$ 时, $(|AD| \cdot |AO|)_{\min} = 18$.

22: 已知函数 $s(x) = \ln(x+a)$, $t(x) = x - 1$.

(1) 若关于 x 的不等式 $m + a \bullet t(x) \geq s(x)$ 恒成立, 求 m 取值范围;

(2) 若 $a > 1$, 方程 $a \bullet t(x) = s(x)$ 的较小的实根为 x_0 , 证明: 函数 $g(x) = |a \bullet t(x) - s(x)| + t(x)$ 在 $(-a, x_0)$ 上单调递减;

(3) 若 $a > 0$, 且函数 $y = s(x) - s(0) - a \bullet t(x)$ 的较大零点, 证明: $x_1 + 2a > 4$.

(1) 解 : 原不等式等价于 $m \geq -a \bullet t(x) + s(x)$, 记 $h(x) = -a \bullet t(x) + s(x)$, 则

$h'(x) = -a + \frac{1}{x+a}$ ($x > -a$), 易得 $x \in (-a, \frac{1}{a} - a)$, $h'(x) > 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递增.

$x \in (\frac{1}{a} - a, +\infty)$, $h'(x) < 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减. 所以 $h(x)_{\max} = h(-a + \frac{1}{a})$, 所以 $m > a^2 + a - \ln a - 1$.

(2) 解 : 结合函数 $y = a \cdot t(x)$, $y = s(x)$ 易知, 当 $x \in (-a, x_0)$, $a \cdot t(x) > s(x)$, 所以 $g(x) = (a+1) \cdot t(x) - s(x)$. 因为 $g'(x) = (a+1) - \frac{1}{x+a}$. 下证: $x_0 < \frac{1}{a+1} - a$. 即可. 记 $g(a) = f(\frac{1}{a+1} - a) = a^2 + a - \frac{1}{a+1} - \ln(a+1)$, $g'(a) = 2a+1 - \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{a+1} > 0$, 所以 $g(a)$ 递增函数, 所以 $f(x_0) < f(\frac{1}{a+1} - a)$, 所以 $x_0 < \frac{1}{a+1} - a$, 所以函数 $g(x) = |a \cdot t(x) - s(x)| + t(x)$ 在 $(-a, x_0)$ 上单调递减;

(3) 解 : 因为 $s(x) - s(0) = \ln(\frac{x}{a} + 1)$, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(\frac{x}{a} + 1) \geq \frac{x}{x+a}$. 记 $\frac{x}{x+a} = a(x-1)$ 较大的根为 $x_2 = \frac{-(a^2 - a + 1) + \sqrt{a^4 + 2a^3 + 2a + 1 - a^2}}{2a}$, 且 $x_1 > x_2$. 所以

$$x_1 + 2a > \frac{3a}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2(a + \frac{1}{a}) - 1} > \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \sqrt{5} > 4$$

(1) 解 : 令 $f'(x) = \frac{1}{x+a} - a = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a} - a$. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-a, \frac{1}{a} - a)$ 上单调递增, 在区间 $[\frac{1}{a} - a, +\infty)$ 单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a} - a) = a^2 + a - \ln a - 1 \therefore m \geq a^2 + a - \ln a - 1$

(2) 解 : 证明: 由 (1) 令 $h(a) = a^2 + a - \ln a - 1$ ($a > 1$), 则 $h'(a) = 2a + 1 - \frac{1}{a} > h'(1) > 0$, $\therefore h(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $h(a) > h(1) = 1 > 0$ 而当 $x \rightarrow -a$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 由题意, 可得

$x_0 \in (-a, \frac{1}{a} - a)$ 所以当 $x \in (-a, x_0)$ 时, $f(x) < 0$, 则 $g(x) = -f(x) + x - 1 = (a+1)(x-1) - \ln(x+a)$,

当 $x \in (-a, x_0)$ 时, $g'(x) = a+1 - \frac{1}{x+a} < a+1 - \frac{1}{x_0+a}$,

要想证明函数 $g(x) = |f(x)| + x - 1$ 在区间 $(-a, x_0)$ 上单调递减, 只亦 $g'(x) \leq 0$, 故只要证明

$$x_0 \leq \frac{1}{a+1} - a, \quad G(a) = f\left(\frac{1}{a+1} - a\right) = a^2 + a - \frac{a}{a+1} - \ln(a+1),$$

$$G'(a) = 2a + 1 - \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{a+1} > G'(1) > 0$$

所以 $G(a)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$G(a) > G(1) = \frac{3}{2} - \ln 2 > 0 \therefore f(x_0) < f\left(\frac{1}{a+1} - a\right), x_0 < \frac{1}{a+1} - a, \text{ 且 } f(x) \text{ 在区间 } \left(-a, \frac{1}{a+1} - a\right) \text{ 上单调递}$$

增, 所以 $x_0 \leq \frac{1}{a+1} - a$, 所以 $g(x) = |f(x)| + x - 1$ 在 $(-a, x_0)$ 上单调递减

(3) 解: 显然 $x_1 > 0$, 先证 $\ln(x+a) - \ln a \geq \frac{2x}{x+2a}$, $u(x) = \ln(x+a) - \ln a - \frac{2x}{x+2a}$

$$u'(x) = \frac{1}{x+a} - \frac{4a}{(x+2a)^2} = \frac{x^2}{(x+a)(x+2a)} > 0,$$

$$u(x) > u(0) = 0, f(x) - \ln a = \ln(x+a) - \ln a - a(x-1) > \frac{2x}{x+2a} - a(x-1)$$

$$\text{设 } v(x) = \frac{2x}{x+2a} - a(x-1), \text{ 由 } v(x) = 0 \text{ 得 } ax^2 + (2a^2 - a - 2)x - 2a^2 = 0,$$

显然 $\Delta > 0$, 设 $v(x)$ 的较大零点为 $x_2 < x_1$, 因为 $a + \frac{1}{a} \geq 2$, 所以

$$x_2 + 2a = \frac{-2a^2 + a + 2 + \sqrt{4a^4 + 4a^3 - 7a^2 + 4a + 4}}{2a} + 2a = \frac{1}{2} + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \sqrt{4\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 4\left(a + \frac{1}{a}\right) - 15} \geq 0$$

故 $x_1 + 2a > 4$.